# White Noise : Metrical Automorphismsの一クラスについて (フーリエ解析)



野本, 久夫

数理解析研究所講究録
110巻 1971年 9-13



# White noise
## —metrical automorphisms の一クラスについて—

名大教養　野本 久夫

## 1. White noise

$E \subset H \cong H^* \subset E^*$ を rigged Hilbert space：H は（可分な）実ヒルベルト空間，E は H で dense な nuclear space とする．$H^*$，$E^*$ はそれぞれの conjugate spaces をあらわすものとする．E 上の関数 $C(\xi)$ が，連続，positive-definite かつ $C(0) = 1$ をみたせば Bochner-Minlos の定理により，$(E^*, \mathcal{L})$ 上に唯一つの確率測度 $\mu$ が存在して，$C(\xi)$ はそのフーリエ変換となっている．

$$(1) \qquad C(\xi) = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi\rangle} d\mu(x)$$

こゝに，$\mathcal{L}$ は $E^*$ の cylinder sets の生成する σ-algebra，$\langle x, \xi\rangle$ は $E^* \times E$ 上の canonical な bilinear form である．とくにつぎの C

$$(2) \quad C(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right\}, \qquad \|\xi\| = \xi \text{ の H-norm}$$

に対応する測度 $\mu$ を Gauss 測度, white noise 等と呼ぶ。

以下では white noise の空間 $(E^*, \mathcal{L}, \mu)$ 上に H の直交変換が induce する metrical automorphism に関した考察を行なう.

2. 直交群 $O(H)$ と metrical automorphisms.

$L^2 = L^2(E^*, \mu)$

$O(H) = \{g : g \text{ は H の直交変換}\}$

$O(E) = \{g : g \in O(H),\ g : E \to E \text{ なる homeomorphism}\}$

$O(E^*) = \{g^* : \langle g^* x, \xi\rangle = \langle x, g^{-1}\xi\rangle,\ g \in O(E)\}$

$\mathfrak{O}(E^*) = \{T ;\ T \text{ は } E^* \text{ 上の metrical automorphism}\}$

とおく. (2) より $C(g\xi) = C(\xi)$ だから $O(E^*) \subset \mathfrak{O}(E^*)$ であるが, $O(H) \subset \mathfrak{O}(E^*)$ であることも次のようにしてわかる.

1°) map $\gamma : E \ni \xi \longrightarrow \langle \cdot, \xi\rangle \in L^2$

は linear, isometric で H 上まで拡張できる. $\gamma(f)$ $(f \in H)$ を $\langle \cdot, f\rangle$ とかくことにする. $\langle \cdot, f\rangle$ は確率変数で, その分布は平均 0, 分散 $\|f\|^2$ の正規分布 $N(0, \|f\|^2)$ である.

2°) $M$ を $e^{i\langle x, f\rangle}$, $f \in H$ の 1 次結合の全体とすると $L^2$ で dense なことが知られている. このとき, $M$ の元

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{i\langle x, f_k\rangle}$$

に対して,

$$(3) \quad U_g\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{i\langle x, gf_k\rangle} \quad , \qquad g \in O(H)$$

は well-defined で, $M$ の内積を保つ変換となっている. したがって $U_g$ は $L^2$ の unitary 変換に拡張できる. 定義から容易に,

$$(4) \quad U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2} \quad , \qquad g_\nu \to g \text{ (strong)} \Longrightarrow U_{g_\nu} \to U_g \text{ (strong)}$$

このとき, つぎの定理が成り立つ.

定理　$O(H)$ から $\mathfrak{O}(E^*)$ への変換 $T$ で

(i) $U_g\varphi(x) = \varphi(T_g^{-1}x)$ , $T_g = T\cdot g$ , $\varphi \in L^2$

(ii) $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$ (mod 0)

をみたすものが存在し, $g \in O(E^*)$ に対しては $T_g = g^*$ がなりたつ.

証明は各 $U_g$ が有界可測関数 $\varphi, \psi$ に対して multiplicative, $U_g(\varphi\psi) = U_g\varphi \cdot U_g\psi$ なることと $(E^*, \mu)$ が Lebesgue space なることから得られる.

## 3° Brown 運動の射影不変性

P. Lévy の Brown 運動に関する射影不変性についての [2] の

アプローチでは $O(E^*)$ を利用している．そのためには E のえらび方に工夫が必要となるが，$O(H)\subset \Omega(E^*)$ を用いるとそれをさけることができる．以下でそのことを簡単に述べよう．

$$E = \text{Schwartz の } \mathcal{S}, \qquad H = L^2(\mathbb{R}, dx)$$

とる．nonsingular な map $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$(5) \quad g_\varphi : H \ni f(u) \longrightarrow f(\varphi u)\sqrt{\frac{d\varphi u}{du}}$$

とおけば，$g_\varphi \in O(H)$ である．今，$\varphi$ は $[a, b] \longrightarrow [c, d]$，$\varphi(a) = c$ なる射影変換とする．

$$(6) \quad \varphi : u \longrightarrow \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

例に

$$X(t,x) = \sqrt{\frac{b-t}{t-a}}\ \left\langle x,\ \chi_{[a,t]}(u)\sqrt{\frac{b-a}{b-u}}\right\rangle$$
$$Y(t,x) = \sqrt{\frac{d-t}{t-c}}\ \left\langle x,\ \chi_{[c,t]}(u)\sqrt{\frac{d-c}{d-u}}\right\rangle,$$

$\chi_A$ は $A \subset \mathbb{R}$ の indicator

なる確率過程を考える．これらは Brown 運動 $\langle x, \chi_{[a,t]}(u)\rangle$，$\langle x, \chi_{[c,t]}\rangle$ からそれらの ~~linear~~ interpolation として得られている (cf [1])．さて，(6) の $\varphi$ に対しては，少し計算すれば，

$$Y(t, T_\varphi^{-1} x) = X(\varphi^{-1}(t), x), \qquad c < t < d,$$
$$T_\varphi = T_{g_\varphi}$$

なることがわかる．これは $X(t)$ の time change $X(\varphi^{-1}(t))$ が $Y(t,$

$T_{\varphi}'x)$ と，したがって $T_{\varphi}$ は metrical automorphism であるから $Y(t, x)$ と equivalent な process であることを示す.

## 引用文献

[1] T. Hida; Stationary stochastic process, Lecture note in Princeton University, (1969).

[2] T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto and H. Yoshizawa; On projective invariance of Brownian motion, Publ. RIMS, Vol 4, No. 3, (1969), 595-609.